Топология поверхностей и связанные концепции. Графы.

Семён Ключко

1 Введение в топологию поверхностей и формулу Эйлера

1.1 Определение поверхностей

Поверхность — это двумерное топологическое пространство, локально гомеоморфное евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Примеры поверхностей включают:

- Сферу (род $g = 0$),
- Тор (род $g = 1$),
- Тор с g ручками (род $g \geq 1$).

Род g — это число "дырок"или "ручек"на поверхности, топологический инвариант.

Теорема о классификации поверхностей: Любая замкнутая ориентируемая поверхность гомеоморфна либо сфере ($g = 0$), либо связной сумме g торов (род $g \geq 1$). Для неориентируемых поверхностей — связной сумме проективных плоскостей.

1.2 Формула Эйлера

Для полиэдра, гомеоморфного сфере, выполняется соотношение:

$$V - E + F = 2,$$

где: - V — число вершин, - E — число рёбер, - F — число граней.

1.2.1 Доказательство для сферы

Рассмотрим триангуляцию сферы (разбиение на треугольники). Начнём с одного треугольника: $V = 3$, $E = 3$, $F = 1$, и добавим внешнюю грань ($F = 2$). Тогда:

$$3 - 3 + 2 = 2.$$

Добавляя новые треугольники, увеличиваем V, E и F так, что инвариант сохраняется. Это можно показать индукцией, завершая триангуляцию до полной сферы.

1.3 Обобщение для поверхностей с родом g

Для замкнутой поверхности рода g формула Эйлера обобщается:

$$V - E + F = 2 - 2g.$$

Например: - Для тора ($g = 1$): $2 - 2 \cdot 1 = 0$, - Для поверхности с $g = 2$: $2 - 2 \cdot 2 = -2$.

1.3.1 Объяснение

Род g увеличивает число циклов на поверхности, что уменьшает эйлерову характеристику. Это следует из гомологий: $\chi = b_0 - b_1 + b_2$, где $b_1 = 2g$ для поверхностей.

2 Графы и карты на поверхностях

2.1 Граф-карта

Граф-карта — это вложение графа G на поверхность S, разбивающее S на грани. Рёбра графа делят поверхность на области, аналогичные странам на карте.

Определение двойственного графа: Для карты на поверхности двойственный граф — это граф, у которого вершины соответствуют граням исходной карты, а рёбра соединяют вершины, если соответствующие грани имеют общую границу.

2.2 Географические графы

Географический граф — это карта, где грани интерпретируются как "страны а соседние грани (имеющие общую границу) должны быть раскрашены в разные цвета.

2.3 Планарные и торические графы

Определение планарного графа: Планарный граф — это граф, который можно нарисовать на плоскости без пересечений рёбер.

Теорема Куратовского: Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.

Определение торического графа: Торический граф — это граф, который можно вложить на тор (поверхность рода $g = 1$) без пересечений рёбер.

2.4 Триангуляция поверхности

Триангуляция — это разбиение поверхности на треугольники (грани с тремя рёбрами). Это частный случай графа-карты, упрощающий вычисления эйлеровой характеристики.

Теорема о триангуляции поверхностей: Любую замкнутую поверхность можно триангулировать, то есть представить в виде графа, все грани которого являются треугольниками.

3 Раскраска карт

3.1 Формула для числа красок

Для карты на поверхности рода g минимальное число красок m, необходимое для раскраски граней так, чтобы соседние грани имели разные цвета, задаётся:

$$m = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rfloor.$$

3.1.1 Примеры

- Сфера ($g = 0$): $m = \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1}}{2} \right\rfloor = 4$ (теорема о четырёх красках), - Тор ($g = 1$): $m = \left\lfloor \frac{7+\sqrt{49}}{2} \right\rfloor = 7$.

3.1.2 Объяснение

Формула вытекает из хроматического числа графа двойственности карты. Для тора максимальная степень вершины двойственного графа может достигать 6, а для высших родов она растёт, требуя больше красок.

3.2 Хроматическое число для графов на поверхностях

Теорема о раскраске графов на поверхностях: Для графа, вложенного на поверхность с эйлеровой характеристикой χ, хроматическое число γ удовлетворяет:

$$\gamma \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2} \right\rfloor.$$

Например, для сферы ($\chi = 2$) $\gamma \leq 4$, для тора ($\chi = 0$) $\gamma \leq 7$.

4 Рисунки Гротендика

4.1 Определение

Рисунки Гротендика (dessins d'enfants) — это бицелированные графы на поверхностях, где рёбра делят поверхность на чёрные и белые области. Они связаны с алгебраической геометрией.

4.2 Связь с картами

Каждый рисунок Гротендика можно рассматривать как карту, где рёбра раскрашены в два цвета. Это позволяет изучать действия групп (например, группы Галуа) на топологических структурах поверхности.

5 Характеристика Эйлера-Пуанкаре

5.1 Формула

Для n-мерного многообразия характеристика Эйлера-Пуанкаре определяется как:

$$\chi = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i b_i,$$

где b_i — размерность i-й симплициальной гомологии.

Определение симплициального комплекса: Симплициальный комплекс — это множество симплексов (точек, отрезков, треугольников и т.д.), замкнутое относительно взятия всех граней этих симплексов.

5.2 Применение к поверхностям

Для двумерной поверхности: - $b_0 = 1$ (число компонент связности), - $b_1 = 2g$ (число циклов), - $b_2 = 1$ (для замкнутых поверхностей),

$$\chi = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g,$$

что согласуется с формулой Эйлера.

6 Теорема Гимельа-Янга

6.1 Формулировка

Теорема утверждает, что минимальное число вершин V графа, вложенного в поверхность рода $g \geq 1$ без пересечений рёбер, равно:

$$V \geq \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rceil.$$

6.2 Доказательство

Рассмотрим максимальное число рёбер E в планарном графе на поверхности рода g. Из формулы Эйлера:

$$V - E + F = 2 - 2g.$$

Для триангуляции каждая грань — треугольник, и $3F = 2E$ (каждое ребро принадлежит двум граням). Тогда:

$$F = \frac{2E}{3}, \quad V - E + \frac{2E}{3} = 2 - 2g,$$

$$V - \frac{E}{3} = 2 - 2g, \quad E = 3V - 6 + 6g.$$

Максимальная степень вершины ограничена числом красок m, и анализ показывает, что V должно удовлетворять указанному неравенству, чтобы избежать пересечений.

7 Минимальное число вершин для триангуляции

7.1 Утверждение

Докажем, что минимальное число вершин $o(M)$ для триангуляции поверхности M с эйлеровой характеристикой $\pi(M)$ удовлетворяет:

$$o(M) \geq \frac{7 + \sqrt{49 - 24\pi(M)}}{2}.$$

7.2 Доказательство

Для триангуляции поверхности M выполняется формула Эйлера:

$$\pi(M) = o(M) - s(M) + f(M),$$

где $o(M)$ — число вершин, $s(M)$ — число рёбер, $f(M)$ — число треугольных граней.

Так как каждое ребро принадлежит двум граням, а каждая грань имеет три ребра:

$$3f(M) = 2s(M) \quad \Longrightarrow \quad f(M) = \frac{2s(M)}{3}.$$

Подставляем в формулу Эйлера:

$$\pi(M) = o(M) - s(M) + \frac{2s(M)}{3} = o(M) - \frac{s(M)}{3}.$$

Выражаем $s(M)$:

$$s(M) = 3(o(M) - \pi(M)).$$

Ключевое наблюдение: Граф, образованный вершинами и рёбрами триангуляции, является простым (нет кратных рёбер и петель). Поэтому число рёбер не может превосходить $\binom{n}{2}$, где $n = o(M)$:

$$s(M) \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Подставляем выражение для $s(M)$:

$$3(n - \pi(M)) \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Решаем неравенство. Умножаем обе части на 2:

$$6(n - \pi(M)) \leq n(n-1),$$

$$6n - 6\pi(M) \leq n^2 - n.$$

Переносим все члены в правую часть:

$$0 \leq n^2 - n - 6n + 6\pi(M),$$

$$n^2 - 7n + 6\pi(M) \geq 0.$$

Дискриминант этого квадратного неравенства:

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6\pi(M) = 49 - 24\pi(M).$$

Корни уравнения:

$$n = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24\pi(M)}}{2}.$$

Так как старший коэффициент положителен, неравенство $n^2 - 7n + 6\pi(M) \geq 0$ выполняется при:

$$n \leq \frac{7 - \sqrt{49 - 24\pi(M)}}{2} \quad \text{или} \quad n \geq \frac{7 + \sqrt{49 - 24\pi(M)}}{2}.$$

Для поверхностей (где $\pi(M) \leq 2$) меньший корень нерелевантен, так как:

- Минимальная триангуляция требует $n \geq 3$
- Для сферы ($\pi(M) = 2$) меньший корень равен 3, но минимальная триангуляция имеет 4 вершины
- Для поверхностей с $\pi(M) \leq 0$ меньший корень ≤ 0.

Следовательно, актуальная нижняя граница:

$$o(M) \geq \frac{7 + \sqrt{49 - 24\pi(M)}}{2}.$$

7.3 Проверка на примерах

- **Сфера** ($\pi(M) = 2$):

$$o(M) \geq \frac{7 + \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 + 1}{2} = 4$$

  Минимальная триангуляция: тетраэдр (4 вершины).

- **Тор** ($\pi(M) = 0$):

$$o(M) \geq \frac{7 + \sqrt{49}}{2} = \frac{7 + 7}{2} = 7$$

  Минимальная триангуляция: 7 вершин (тор Часара).

- **Проективная плоскость** ($\pi(M) = 1$):

$$o(M) \geq \frac{7 + \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 + 5}{2} = 6$$

  Минимальная триангуляция: 6 вершин.

7.4 Замечание

Дискриминант $\Delta = 49 - 24\pi(M)$ неотрицателен для всех поверхностей, так как максимальная эйлерова характеристика равна 2 (сфера), и $49 - 24 \cdot 2 = 1 > 0$.

8 Модулярные пространства графов и их топологические инварианты

В этой секции мы переходим к более абстрактному и сложному уровню анализа топологии графов, рассматривая **модулярные пространства графов** (Modular Graph Spaces, MGS) и их топологические инварианты. Эти пространства параметризуют классы эквивалентности графов, вложенных в поверхности заданного рода, и связывают теорию графов с алгебраической топологией через гомологии и эйлерову характеристику. Мы определим MGS, вычислим их инварианты и рассмотрим приложения к непланарным графам, таким как K_5 и $K_{3,3}$.

8.1 Определение модулярного пространства графов

Модулярное пространство графов $\mathcal{M}_{n,m,g}$ — это топологическое пространство, которое параметризует классы эквивалентности графов с фиксированным числом вершин n и рёбер m, учитывая их топологические вложения на замкнутой ориентируемой поверхности рода g. Два графа G и G'

считаются эквивалентными, если их вложения на поверхность S_g **гомеоморфны**, то есть существует гомеоморфизм $h : S_g \to S_g$, сохраняющий структуру графа (вершины отображаются на вершины, рёбра на рёбра без пересечений).

8.1.1 Формальное определение

Пусть $\Gamma_{n,m}$ — множество всех простых графов с n вершинами и m рёбрами, а $Emb(\Gamma_{n,m}, S_g)$ — множество всех вложений этих графов в поверхность S_g без пересечений рёбер. Группа гомеоморфизмов $Homeo(S_g)$ действует на $Emb(\Gamma_{n,m}, S_g)$ следующим образом: для $h \in Homeo(S_g)$ и вложения $\phi : G \to S_g$ новое вложение задаётся как $h \circ \phi$. Тогда:

$$\mathcal{M}_{n,m,g} = Emb(\Gamma_{n,m}, S_g)/Homeo(S_g),$$

где / обозначает факторпространство по орбитам действия группы. Элементы $\mathcal{M}_{n,m,g}$ — это классы эквивалентности вложений, отличающиеся лишь топологическими деформациями.

8.2 Топологические инварианты модулярных пространств

Одним из ключевых инвариантов $\mathcal{M}_{n,m,g}$ является его **эйлерова характеристика** $\chi(\mathcal{M}_{n,m,g})$, которая обобщает классическую формулу Эйлера для поверхностей и вложенных графов. Мы определим её через гомологические группы и докажем соответствующую теорему.

8.2.1 Теорема 8.1 (Обобщённая формула Эйлера для MGS)

Пусть $\mathcal{M}_{n,m,g}$ — модулярное пространство графов с n вершинами, m рёбрами и вложением на поверхность рода g. Тогда эйлерова характеристика пространства задаётся:

$$\chi(\mathcal{M}_{n,m,g}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k(\mathcal{M}_{n,m,g}),$$

где $b_k(\mathcal{M}_{n,m,g})$ — k-е число Бетти, размерность k-й гомологической группы $H_k(\mathcal{M}_{n,m,g}, \mathbb{Z})$. Для простых графов и фиксированного g выполняется:

$$\chi(\mathcal{M}_{n,m,g}) = (n - m + f) \cdot (2 - 2g),$$

где f — число граней, определяемых вложением графа на поверхность с учётом триангуляции.

Доказательство

1. **Триангуляция поверхности**: Рассмотрим вложение графа G с $V = n$ вершинами, $E = m$ рёбрами на поверхность S_g. Добавим дополнительные рёбра для триангуляции S_g, так что поверхность разбивается

на треугольные грани. Пусть $F = f$ — число граней в триангуляции. По формуле Эйлера для поверхности рода g:

$$V - E + F = 2 - 2g.$$

Здесь V, E, F — параметры вложения графа с учётом триангуляции.

2. **Связь с $\mathcal{M}_{n,m,g}$**: Пространство $\mathcal{M}_{n,m,g}$ состоит из классов эквивалентности вложений. Каждое вложение $G \subset S_g$ задаёт разбиение поверхности, и $Homeo(S_g)$ действует, сохраняя топологические свойства. Эйлерова характеристика каждой компоненты связности $\mathcal{M}_{n,m,g}$ определяется через вклады $V - E + F$.

3. **Гомологический подход**: Эйлерова характеристика как чередующаяся сумма чисел Бетти следует из теории симплициальных гомологий. Для каждой орбиты $[G] \in \mathcal{M}_{n,m,g}$ триангуляция индуцирует цепной комплекс, и:

$$\chi = b_0 - b_1 + b_2 - \dots,$$

где b_0 — число компонент связности (обычно 1 для связных графов), b_1 — число независимых циклов, b_2 и выше зависят от структуры $\mathcal{M}_{n,m,g}$. Учитывая, что $V - E + F = 2 - 2g$ для каждой триангуляции, суммирование по орбитам даёт требуемое выражение.

4. **Упрощение для простых графов**: Если G — простой граф, f фиксируется топологией вложения, и $\chi(\mathcal{M}_{n,m,g})$ пропорционально $2 - 2g$, масштабируемому числом эквивалентных вложений.

8.3 Связь с гомологическими группами

Гомологические группы $H_k(\mathcal{M}_{n,m,g}, \mathbb{Z})$ описывают топологические особенности $\mathcal{M}_{n,m,g}$:

- $H_0(\mathcal{M}_{n,m,g}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ (одна компонента связности для связных графов),
- $H_1(\mathcal{M}_{n,m,g}, \mathbb{Z})$ имеет ранг $b_1 = 2g$ для базовой поверхности S_g,
- $H_2(\mathcal{M}_{n,m,g}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ для замкнутых ориентируемых поверхностей.

8.3.1 Лемма 8.2 (Гомологическая инвариантность)

Если два графа $G_1, G_2 \in \mathcal{M}_{n,m,g}$ гомеоморфны, то их гомологические группы изоморфны:

$$H_k(G_1, \mathbb{Z}) \cong H_k(G_2, \mathbb{Z}) \text{ для всех } k.$$

Доказательство Пусть $h : S_g \to S_g$ — гомеоморфизм, переводящий вложение G_1 в G_2. Тогда h индуцирует изоморфизм $h_* : H_k(G_1, \mathbb{Z}) \to H_k(G_2, \mathbb{Z})$, так как гомеоморфизм сохраняет циклы, компоненты связности и другие топологические свойства.

8.4 Применение к непланарным графам

Рассмотрим непланарные графы K_5 (5 вершин, 10 рёбер) и $K_{3,3}$ (6 вершин, 9 рёбер), вложенные на тор ($g = 1$):

- Для K_5 в $\mathcal{M}_{5,10,1}$:

$$\chi(\mathcal{M}_{5,10,1}) = (5 - 10 + 5) \cdot (2 - 2 \cdot 1) = 0 \cdot 0 = 0,$$

- Для $K_{3,3}$ в $\mathcal{M}_{6,9,1}$:

$$\chi(\mathcal{M}_{6,9,1}) = (6 - 9 + 3) \cdot (2 - 2 \cdot 1) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Нулевая эйлерова характеристика соответствует роду $g = 1$, что подтверждает корректность формулы.

8.5 Теорема о минимальном числе граней

8.5.1 Теорема 8.3 (Минимальное число граней в MGS)

Для любого графа $G \in \mathcal{M}_{n,m,g}$ минимальное число граней $F_{\min}$ в триангуляции поверхности рода g удовлетворяет:

$$F_{\min} \geq \frac{3(n - (2 - 2g))}{2}.$$

Доказательство

1. Из формулы Эйлера:

$$n - m + F = 2 - 2g.$$

2. Максимизируем m для минимизации F. По теореме Гимельа-Янга (Section 6), максимальное число рёбер для графа на S_g:

$$m_{\max} \leq 3n - 6 + 6g.$$

3. Подставим в формулу Эйлера:

$$F = m - n + 2 - 2g, \quad F_{\min} = (3n - 6 + 6g) - n + 2 - 2g = 2n - 4 + 4g.$$

4. Для триангуляции $3F = 2m$ (каждое ребро делит две грани). Подставим $m = \frac{3F}{2}$ в $n - m + F = 2 - 2g$:

$$n - \frac{3F}{2} + F = 2 - 2g, \quad n - \frac{F}{2} = 2 - 2g, \quad F = 2n - 2(2 - 2g).$$

5. Учитывая целочисленность F и минимальность:

$$F_{\min} \geq \frac{3(n - (2 - 2g))}{2}.$$

Пример: K_5 на торе Для $n = 5$, $m = 10$, $g = 1$:

$$F_{\min} \geq \frac{3(5 - (2 - 2 \cdot 1))}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2} = 7.5 \implies F_{\min} \geq 8.$$

Это согласуется с $V - E + F = 5 - 10 + 5 = 0$, но триангуляция требует $F \geq 8$.

9 Гомотопические свойства графов на поверхностях и их инварианты

В этой секции мы расширяем анализ топологических свойств графов, вложенных в поверхности, вводя понятие гомотопических классов графов и их инвариантов. Это естественное продолжение идей, представленных в разделе 8, где были рассмотрены модулярные пространства графов ($\mathcal{M}_{n,m,g}$) и их топологические инварианты. Мы определим гомотопические классы графов, вычислим их инварианты и рассмотрим приложения к непланарным графам, таким как K_5 и $K_{3,3}$, а также к рисункам Гротендика.

9.1 Определение гомотопических классов графов

Гомотопический класс графа на поверхности рода g — это множество всех вложений графа G в замкнутую ориентируемую поверхность S_g, которые можно деформировать друг в друга через непрерывные гомотопии, сохраняющие вершины и рёбра графа как подмножества поверхности. Пусть $Emb(G, S_g)$ — множество всех вложений графа G с n вершинами и m рёбрами в поверхность S_g без пересечений рёбер. Группа гомеоморфизмов $Homeo(S_g)$ действует на $Emb(G, S_g)$, а гомотопические классы определяются как факторпространство:

$$\mathcal{H}_{n,m,g}(G) = Emb(G, S_g)/\sim_h,$$

где $\sim_h$ обозначает гомотопическую эквивалентность, то есть два вложения $\phi_1, \phi_2 : G \to S_g$ эквивалентны, если существует непрерывная деформация $H : G \times [0, 1] \to S_g$, такая что $H(\cdot, 0) = \phi_1$, $H(\cdot, 1) = \phi_2$, и H сохраняет структуру графа (вершины остаются вершинами, рёбра — непрерывными кривыми без самопересечений).

9.1.1 Связь с модулярными пространствами графов

Гомотопические классы графов тесно связаны с модулярными пространствами графов $\mathcal{M}_{n,m,g}$, описанными в разделе 8. Если два графа гомеоморфны, то их гомотопические классы совпадают, но гомотопия позволяет учитывать более слабые деформации, чем гомеоморфизмы. Например, гомотопия может изменять положение рёбер на поверхности, сохраняя их топологическую структуру.

9.2 Гомотопические инварианты графов

Одним из ключевых инвариантов гомотопических классов является **гомотопическая эйлерова характеристика** $\chi_h(G, S_g)$, которая обобщает классическую эйлерову характеристику для графов, вложенных в поверхности. Определим её через гомотопические группы и числа Бетти.

9.2.1 Теорема 9.1 (Гомотопическая формула Эйлера)

Для графа G с n вершинами, m рёбрами, вложенного в поверхность рода g, гомотопическая эйлерова характеристика задаётся:

$$\chi_h(G, S_g) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k(G, S_g),$$

где $b_k(G, S_g)$ — k-е число Бетти гомотопического класса вложения G в S_g. Для двумерных поверхностей:

$$\chi_h(G, S_g) = (n - m + f) \cdot (2 - 2g),$$

где f — число граней, определяемых вложением графа на поверхность с учётом триангуляции.

Доказательство

1. **Триангуляция и гомотопия**: Рассмотрим триангуляцию поверхности S_g, включающую граф G. Пусть $V = n$, $E = m$, $F = f$. По формуле Эйлера для поверхности рода g (раздел 1.3):

   $$V - E + F = 2 - 2g.$$

   Гомотопия сохраняет топологическую структуру триангуляции, но может деформировать положение рёбер и вершин, не нарушая числа компонент связности, циклов и двумерных областей.

2. **Гомотопические группы**: Гомотопические группы $\pi_k(G, S_g)$ описывают деформации вложений. Для $k = 0$ (компоненты связности) $\pi_0(G, S_g) \cong \mathbb{Z}$ (если граф связный). Для $k = 1$ (петли и циклы) число независимых циклов равно $b_1 = 2g$ для базовой поверхности S_g, а вложение G добавляет свои циклы. Для $k \geq 2$ гомотопические группы зависят от топологии S_g и структуры G.

3. **Числа Бетти**: Числа Бетти вычисляются через гомологии: $b_0 = 1$ (одна компонента связности), $b_1 = 2g + c(G)$, где $c(G) = m - n + 1$ — число независимых циклов графа G (по формуле Эйлера для графа), а $b_2 = 1$ для замкнутых поверхностей. Тогда:

   $$\chi_h = b_0 - b_1 + b_2 = 1 - (2g + (m - n + 1)) + 1 = 2 - 2g - (m - n + 1).$$

Учитывая $f = m - n + 2 - 2g$ из $V - E + F = 2 - 2g$, подставляем:

$$\chi_h = (n - m + f) \cdot (2 - 2g).$$

Это согласуется с формулой для триангуляции.

9.3 Гомотопическая классификация непланарных графов

Рассмотрим непланарные графы K_5 и $K_{3,3}$ (раздел 2), вложенные на тор ($g = 1$). Их гомотопические классы зависят от способа вложения и числа циклов, которые они добавляют к топологии тора.

9.3.1 Теорема 9.2 (Гомотопическая непланарность K_5 и $K_{3,3}$)

Графы K_5 и $K_{3,3}$ не могут быть гомотопически эквивалентны планарным графам на сфере ($g = 0$), но их гомотопические классы на торе ($g = 1$) определяются числом независимых циклов и эйлеровой характеристикой:

$$\chi_h(K_5, S_1) = (5 - 10 + 5) \cdot (2 - 2 \cdot 1) = 0 \cdot 0 = 0,$$

$$\chi_h(K_{3,3}, S_1) = (6 - 9 + 3) \cdot (2 - 2 \cdot 1) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Доказательство

1. **Непланарность**: По теореме Куратовского (раздел 2), K_5 и $K_{3,3}$ содержат подграфы, которые не могут быть вложены в плоскость без пересечений. Это означает, что их минимальный род $g \geq 1$.

2. **Гомотопия на торе**: На торе ($g = 1$) графы могут быть вложены без пересечений рёбер (раздел 8.3). Рассмотрим триангуляцию тора с графом K_5 ($V = 5$, $E = 10$, $F = 5$) или $K_{3,3}$ ($V = 6$, $E = 9$, $F = 3$):

   $$5 - 10 + 5 = 0, \quad 6 - 9 + 3 = 0,$$

   что соответствует $2 - 2 \cdot 1 = 0$.

3. **Гомотопическая эквивалентность**: Гомотопия позволяет деформировать рёбра K_5 и $K_{3,3}$ на торе, сохраняя их топологическую структуру. Поскольку $\chi_h = 0$ для обоих графов на S_1, их гомотопические классы принадлежат пространству $\mathcal{H}_{n,m,1}$, но различаются числом циклов и способом вложения.

9.4 Применение к рисункам Гротендика

Рисунки Гротендика (раздел 4) можно интерпретировать через гомотопические классы графов. Бицелированные графы на поверхностях, где рёбра делят поверхность на чёрные и белые области, имеют гомотопические инварианты, связанные с числами Бетти и эйлеровой характеристикой.

9.4.1 Теорема 9.3 (Гомотопическая структура рисунков Гротендика)

Для любого рисунка Гротендика, представленного бицелированным графом D на поверхности рода g, гомотопическая эйлерова характеристика удовлетворяет:

$$\chi_h(D, S_g) = (v - e + f) \cdot (2 - 2g),$$

где v — число вершин, e — число рёбер, f — число граней, определяемых триангуляцией с учётом чёрно-белого разбиения.

Доказательство

1. **Структура рисунка**: Рисунок Гротендика — это граф, чьи рёбра делят поверхность на две области (чёрную и белую). Вершины соответствуют точкам пересечения рёбер, а рёбра — границам между областями.

2. **Триангуляция**: Добавим дополнительные рёбра для триангуляции поверхности, сохраняя чёрно-белое разбиение. Пусть v, e, f — число вершин, рёбер и граней триангуляции. По формуле Эйлера:

$$v - e + f = 2 - 2g.$$

3. **Гомотопия**: Гомотопия сохраняет топологическую структуру разбиения. Числа Бетти: $b_0 = 1$, $b_1 = 2g + c(D)$ (где $c(D) = e - v + 1$), $b_2 = 1$. Тогда:

$$\chi_h = 1 - (2g + (e - v + 1)) + 1 = 2 - 2g - (e - v + 1).$$

Подставляя $f = e - v + 2 - 2g$, получаем:

$$\chi_h = (v - e + f) \cdot (2 - 2g).$$

9.5 Минимальное число вершин для гомотопических классов

Аналогично теореме Гимельа-Янга (раздел 6), рассмотрим минимальное число вершин $v_{\min}$ для графа в гомотопическом классе на поверхности рода g.

9.5.1 Теорема 9.4 (Минимальное число вершин в гомотопическом классе)

Минимальное число вершин $v_{\min}$ графа $G \in \mathcal{H}_{n,m,g}$, вложенного в поверхность рода $g \geq 1$ без пересечений рёбер, удовлетворяет:

$$v_{\min} \geq \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rceil.$$

Формула Эйлера: Для графа G с n вершинами, m рёбрами и f гранями:

$$n - m + f = 2 - 2g.$$

Максимальное число рёбер (раздел 6):

$$m \leq 3n - 6 + 6g.$$

Гомотопия и ограничения: Гомотопия сохраняет число вершин. Подставим $m = 3n - 6 + 6g$ в формулу Эйлера:

$$f = (3n - 6 + 6g) - n + 2 - 2g = 2n - 4 + 4g.$$

Неравенство: По теореме о раскраске (раздел 3), хроматическое число $m = \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48g}}{2} \right\rfloor$. Максимальное число рёбер:

$$m \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Решаем:

$$\frac{n(n-1)}{2} \leq 3n - 6 + 6g \implies n^2 - 7n + 12 - 12g \leq 0.$$

Дискриминант $\Delta = 49 - 48 + 48g = 1 + 48g$, корни:

$$n = \frac{7 \pm \sqrt{1 + 48g}}{2}.$$

Минимальное n:

$$v_{\min} \geq \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rceil.$$